تقدير بالفترة الضبابي لتوزيع معكوس ويبل باستخدام المحاكاة

Estimation of the of the fuzzy interval Inverse Weibull Distribution of using simulation

امتنان ستار عيسى

Emtinan Sattar Eisaa

كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة كربلاء

Economics and Administration College – Karbala University

emtinan.s@s.uokerbala.edu.iq

أ. م.د. مشتاق كريم

Ass.Prof.Dr.Mushtaq Kareem

كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة كربلاء

Economics and Administration College – Karbala University

mushtag.k@uokerbala.edu.iq

* بحث مستل من رسالة ماجستير في الإحصاء.

الملخص

يعد توزيع معكوس ويبل ذو معلمتين من التوزيعات المهمة، تم العمل على دراسة جديدة للتوزيع من خلال تقدير معلماته بالفترة الضبابية بطريقتين طريقة الإمكان الأعظم الضبابية (**Maximum Likelihood Method Fuzzy**) وطريقة الإمكان الأعظم النسبية الضبابية (**Fuzzy Relative Maximum Likelihood Method**) من اجل إيجاد افضل طريقة تقدير تم استعمال أسلوب محاكاة مونت -كارلو (**Monte Carlo**) بالاعتماد على برنامج (**MATLAB**) من خلال دراسة نموذجين لحجوم عينات مختلفة (صغيرة،متوسطة، كبيرة) واختيار قيم مختلفة لمعلمات التوزيع والهدف منه دراسة سلوك المقاييس باستعمال معدل متوسط مربعات الخطأ (**AMSE**) واحتمال التغطية وكانت الافضلية في تقدير بالفترة طريقة الإمكان الأعظم النسبية الضبابية لحجوم العينات الصغيرة والمتوسطة والكبيرة.

الكلمات المفتاحية: البيانات الضبابية، توزيع معكوس ويبل، تقدير بالفترة.

Abstract:

The two-parameter Inverse Weibull distribution is one of the important distributions، a new study has been made for the distribution through fuzzy interval parameters estimation، two ways (Fuzzy Maximum Likelihood Method، Fuzzy Relative Maximum Likelihood Method). In order to find the best estimation method، Monte Carlo simulation method based on MATLAB program was used، by studying two models for different sample sizes (small، medium، large) and choosing different values for the distribution parameters، and the aim of it is to study the behavior of the measures using the Average Mean Squared Error and probability of coverage، The advantage was in estimate of the interval method fuzzy Relative maximum likelihood sample sizes Small، medium and large.

Key words: Fuzzy data، Inverse Weibull distribution، Interval Estimation

المقدمة

في العالم الحقيقي يوجد العديد من المشاكل التي يواجها الانسان في الحياة قد تكون هناك مجموعات من الأشياء التي لا تحتوي على العضوية الدقيقة لعناصرها لذا فان هذه المجموعات لا تشكل مجموعات بالمعنى الرياضي المعتاد على هذه المصطلحات على سبيل المثال اذا كان لدينا مجموعة من الاشخاص في محافظة معينة فيمكننا اخذ مصطلح يمثل «الاشخاص» الذين لديهم العمل من الطبيعي ان يكون لكل شخص في تلك المجموعة عمل ام لا اذا كان شخص لديه عمل وكانت القيمة صفرا فلا يمكن الحصول على العمل ولكن اذا اخذنا مجموعة فرعية التي تمثل «الأشخاص الذين يعملون بشكل جيد للغاية» فيستمتع كل شخص بدرجة معينة من العمل ويتم تمييز الاشخاص في المجموعة بوظيفة العضوية التي تعطي قيمة بين الصفر والواحد وهنا جزيئة الانتماء مسموح به من ناحية أخرى تعد الموثوقية واحدة من التقنيات وأكثرها فاعلية في الوقت الحالي لتقييم عمل أي وحدة انها الوظيفة التي تعطي احتمالية عمل أي وحدة لفترة زمنية معينة دون عطل وتفترض العديد من الطرق والنماذج في شكلها التقليدي ان جميع دالة الاحتمال مدى الحياة واضحة في تطبيقات العالم الحقيقي لذلك من الضروري تعميم طرق تقدير الاحصائي الكلاسيكي للأرقام الحقيقية الى ارقام ضبابية هذا بسبب معلمات توزيع الاحتمالات في بعض الأحيان لا يمكن تسجيلها بدقة بسبب أخطاء الخبرة او التقدير وذلك يؤدي الى المعلمات في توزيعات الحياة غير واضحة وقد يصبح الموثوقية صعبة للتعامل مع الموثوقية التقليدية وبالتالي يمكننا التعامل مع مصطلح اكثر شمولا من مصطلح الموثوقية التقليدي الى الموثوقية الضبابية ويتم تعريف على انها الاحتمال الضبابية لاستمرارية عمل أي وحدة بنجاح لفترة زمنية والى درجة انتماء التي يتم تحديدها وفقا لنظرية عضوية معينة وبدا المنطق الضبابي بالنضوج على يد العالم الاذربيجاني **(Lotfi Zadeh)** في عام ١٩٦٥. [18]

عندما استعمل مصطلح «المتغيرات الضبابية» وهو اول من وضع أسس نظرية المجموعات الضبابية ويتم تعريف المجموعة الضبابية على انها مجموعة من الكائنات او العناصر التي لها درجات انتماء مستمرة تتميز بوظيفة لكل كائن في المجموعة غالبا ما تكون درجة الانتماء بين الصفر والواحد [17] وبصورة عامة التقدير في الاستدلال الاحصائي يقسم على قسمين الأول التقدير بالنقطة والثاني التقدير بالفترة التقدير بالنقطة اي الحصول على قيمة واحدة للمعلمة المراد تقديرها [7] والتقدير بالفترة أي الحصول على فترة للمعلمة المراد تقديرها [7] وقام **Wu** في عام ٢٠٠٤ بتقدير **Bayes** الضبابية باستعمال نهج في البيئة الضبابية بافتراض معالجة ضبابية للمتغيرات الضبابية مع التوزيعات الضبابية [16] وقام **Abbas Pak** واخرون في عام ٢٠١٣ اذ استعملوا منهجية بيز لتقدير بيز للمعلمة للتوزيع رايلي على أساس بيانات أوقات الحياة الضبابية [12] وقامت الباحثة بنين احمد في عام ٢٠٢٠ تقدير معلمات ومعولية توزيع

معكوس كاما في ظل البيانات الضبابية واستعملت ثلاثة طرائق للتقدير وهي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز وطريقة العزوم وتمت نتائج محاكاة مونتي كارلو لمقارنة بين الطرائق التقدير باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (**MSE**) ومتوسط مربعات الخطأ النسبي (**MAPE**) لأحجام عينات مختلفة وتوصلت النتائج بان المعولية الضبابية المقدرة بطريقة بيز هي الأفضل واستعملت في الجانب التطبيقي بيانات حقيقية لسراميك الاسنان وتبينت ان البيانات ملائمة للتوزيع معكوس كاما [2] وقام **Pak** في عام ٢٠١٦ بتقدير الإمكان الأعظم وبيز والعزوم لمعلمة الشكل للتوزيع اللوغاريتم الطبيعي [11] وقام **Mweleli** واخرون في عام ٢٠٢٠ بتقدير بالفترة للتوزيع ويبل استنادا على بيانات خاضعة للرقابة من النوع الثاني. [9]

مشكلة البحث:

على الرغم من ان التقدير بالفترة يعتمد على دقة البيانات المستعملة في تقدير معالم التوزيع الاحتمالي ولكن توجد الكثير من الظواهر في العالم الحقيقي تعاني من عدم الدقة في قياساتها لذلك ستكون الضبابية (**Fuzziness**) هي الصفة الملائمة لها ويتم التعبير عنها بالأرقام ضبابية (**Fuzzy Numbers**) حيث ان ذلك يجعل الأساليب التقليدية في تقدير المعلمات للتوزيع الاحتمالي لتلك البيانات غير مناسبة فلا بد من البحث عن أساليب تستوعب هذه المشكلة وتقودنا الى تقديرات دقيقة ومضبوطة للظواهر قيد الدراسة.

هدف البحث:

الهدف من هذا البحث تقدير معلمات توزيع معكوس و يبل بالفترة الضبابية ومن طرائق التقدير للتوزيع (طريقة الإمكان الأعظم الضبابية، طريقة الإمكان الأعظم النسبية الضبابية) وايجاد افضل مقدر لمعلمات تم تقديره بالفترة الضبابية.

الجانب النظري:

١. توزيع معكوس ويبل Inverse Weibull Distribution

يعد توزيع معكوس ويبل من التوزيعات الاحتمالية المستمرة لنماذج ازمنة الحياة **Lifetime models** وقد قدم هذا التوزيع من قبل عالم الرياضيات الفرنسي **Maurice Frechet** (١٨٢٨-١٩٧٣) والذي يمتاز باستخدامات متعددة (نماذج وتحليل الحوادث الطبيعية مثل الهزات الأرضية والزلازل والفيضانات وسقوط الامطار وسرعة الرياح واختبارات الحياة وتيارات البحار والدراسات البايلوجية والدراسات الطبية) وكذلك يستعمل في نمذجة وفيات ألاطفال الرضع وهو من التوزيعات المناسبة الملائمة لعينات البقاء على قيد الحياة. [4]

واقترح الباحث (**Drapella**) عام (١٩٩٣) [6] تسمية معكوس ويبل وعلى افتراض ان المتغير العشوائي y يتوزع وفقا لتوزيع ويبل (**Weibull**) فأن معكوس المتغير العشوائي (**1/y**) يتوزع وفقا لتوزيع معكوس ويبل (**Inverse Weibull Distribution**) وان دالة الكثافة الاحتمالية تكون بالشكل الاتي:

$$f(x,\alpha,\beta) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right) \text{ ، } x > 0\text{، } \alpha,\beta > 0 \;...(1)$$

α: تمثل معلمة الشكل (**Shape Parameter**)

β: تمثل معلمة القياس (**Scale Parameter**)

وان دالـة التوزيع التراكمي لمتغير يتبع توزيع معكوس ويبل (**Inverse Weibull**) تكون بالشكل الاتي:

$$F(x,\alpha,\beta) = p(X \le x) = \int_0^x f(u)du = \exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right) \;; x > 0 \;...(2)$$

١. الضبابية (Fuzzy)

وتعرف الضبابية على انها الغموض في وصف الأشياء وقياس درجته وترتبط بالمجموعات الضبابية والتي يتم تعيين فيها درجات انتماء معين ضمن فترة محددة [1،0] وأصبحت الضبابية حلاً للمشاكل التي تعاني من عدم الدقة في قياساته [1] اما المجموعة الضبابية هي المجموعة التي تمتلك عناصرها نسبة انتماء معينة تدعى بدرجة الانتماء او درجة العضوية.

أي انها تمتلك مدى بين الفترة [0،1]، لنفترض ان **X** يمثل مجموعة شاملة يحتوي على جميع العناصر وان**Ã**مجموعة جزئية ضبابية من **X** فدالة الانتماء من **Ã** هي دالة في **X** وتكتب دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ويمكن تمثيلها بالشكل الاتي:

$$\tilde{A} = \left\{\left(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)\right), x_i \in X, i = 1,2,3 \ldots\ldots n, 0 \le \mu_{\tilde{A}} \le 1\right\} \ldots (3)$$

فاذا افترضنا ان $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$ يكون العنصر x ينتمي تماما الى **Ã** واذا $\mu_{\tilde{A}}(x)$ يكون العنصر x لا ينتمي تماما الى **Ã** واذا $\mu_{\tilde{A}}(x)=0.8$ يكون العنصر **x** ينتمي بدرجة (**Ã 0.8**) واذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مساوية الى واحد او صفر سنحصل على مجموعة جزئية غير ضبابية. [5]

واما الأرقام الضبابية تعرف بانها الارقام التي تستعمل لوصف حالة عدم التأكد التي تصاحب بعض المشاهدات ويتميز بما تسمى دالة الانتماء وتأتي الأرقـام الضبابية في اشكال عديدة ولكن الأكثر استعمالاً لوصف البيانات الضبابية هي الأرقـام المثلثية الضبابية.

واهم شروط الذي يتميز بيها الرقم الضبابي [8]

١. يجب ان يكون مجموعة ضبابية محدبة وطبيعية معيارية.
٢. يجب ان يكون دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}$ شبه مستمرة من الأعلى.
٣. يجب ان يكون مجموعة المستوى **α** محددة لكل **α∈[0،1]**
٤. يجب ان تكون معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية **R**

الرقم الضبابي المثلثي ويعد هـذا الرقم اكثر شيوعا لسهولة استعماله حيث يتم تمثيله بثلاث نقاط (a_1, a_2, a_3) أي ان، $a_1 < a_2 < a_3$، وقاعدة المثلث الفترة [a1،a2] وراسه عند $x= a2$ و يمكن ان يكتب بالصيغة الاتية:

$$\tilde{N} = (a1 / a2 / a3)$$

وان دالة الانتماء المثلثية للرقم الضبابي المثلثي يمكن تمثيلها كالاتي:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

....................................(4)

ويمثل فضاء العينة الأجزاء الضبابية

$X=(X_1،X_2،X_3،...X_n)$ من $\tilde{x}=(\tilde{x}_1، \tilde{x}_2، \tilde{x}_3،....، \tilde{x}_n)$

بدوال انتماء لها قياس بوريل **Borel Measure** وتحقق قيد التعامد [15]

$\sum \tilde{x} \in X \qquad \mu_{\tilde{x}}(x)=1$ ....(5)

لكل $x \in X$ ويسمى أيضا نظام المعلومات الضبابية (**FIS**)

واما الحدث الضبابي اذا كان $X=(x1،x2،x3،...xn)$ في الفضاء و B_x اصغر حقل بوريل في X فان الحدث الضبابي هو مجموعة فرعية ضبابية $\tilde{A}$ حيث يكون الانتماء له قابل للقياس بوريل [14]

٣- طرائق التقدير بالفترة لتوزيع معكوس ويبل Estimation Methods Interval

٣-١ طريقة الإمكان الأعظم الضبابية (FMLE) Fuzzy Maximum Likelihood Method [10]

اذا توفرت لدينا قياسات عينة عشوائية بحجم n، $x=(x_1،.........،x_n)$ لها توزيع معكوس ويبل **Inverse Weibull Distribution** بدالة الكثافة الاحتمالية حسب الصيغة (١).

وليكن $X=(X_1،......،X_n)$ متجه عشوائي يمثل فضاء العينة، فاذا كان $x=(x_1،....،x_n)$ من X متجه البيانات المشاهدة، فانه يمكن الحصول على دالة الامكان الأعظم للبيانات الكاملة (**Crisp set**) كالآتي:

$$L(\alpha,\beta;x)=\prod_{i=1}^{n} f(\alpha,\beta;x)=\alpha^n\beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)$$

.....................(6)

إذ إن x تكون مشاهدة بصورة واضحة ومتوفرة معلومات كاملة عنها.

اما اذا كانت x غير مشاهدة بصورة واضحة ودقيقة وتتوفر معلومات جزئية عنها في صيغة مجموعة ضبابية جزئية (**Fuzzy subset**) بدالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ لها قياس بوريل، فان المشاهدة الضبابية $\tilde{x}$ يمكن ان تعبر عن المشاهدة الجزئية عن x من المتجه العشوائي X وان دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}$ تعد توزيعاً احتمالياً يفسر القيود عن تلك المشاهدة الجزئية $\tilde{x}$.

ان المجموعة الضبابية $\tilde{x}$ يمكن وصفها بانها ناتجة عن خطوتين:

- ✓ x مسحوب من X
- ✓ المتجه المشاهد x بمثابة معلومات جزئية يمثل المشاهدة وانتماء كل مشاهدة $\mu_{\tilde{x}}(x)$

ويجب ان نلحظ في هذا النموذج ان الخطوة الاولى فقط تعد تجربة عشوائية، اما الخطوة الثانية فتتضمن تجميع معلومات عن x ونمذجة تلك المعلومات كتوزيع احتمالي ضبابي.

وان المعلومات عن x يمكن ان تتمثل بالتوزيع

الاحتمالي الاتي:

$\mu_{\tilde{x}}(x)=\mu_{\tilde{x}_1}(x) \mathrm{x} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{x}\mu_{\tilde{x}_n})(x)$ ....(7)

فاذا كانت x معطاة ويفترض ان دالة انتمائها لها قياس بوريل فاننا يمكن ان نحسب احتمالها وفقاً الى تعريف الاحتمال الضبابي فيمكن الحصول على دالة الامكان الاعظم للبيانات الضبابية كالاتي:

$L(\alpha،\beta;\tilde{x})=p(\tilde{x};\alpha،\beta)=\int f(\tilde{x};\alpha،\beta)\ \mu_{\tilde{x}}(x)dx$ ....(8)

وطالما ان متجه البيانات X هو تحويل من متجه عشوائي متماثل التوزيع ومستقل X، ونفترض ان دالة الانتماء المشتركة قابلة للتحليل، فان دالة الامكان الاعظم الضبابية لتوزيع معكوس ويبل الضبابي يمكن ان تكتب الصيغة الاتية:

$L^*=\log(L0(\alpha،\beta;\tilde{x}))$ ....(9)

وان تقديرات الامكان الاعظم للمعلمات α و β يمكن ان نحصل عليها بتعظيم L^* والاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعلمات α وβ ومساواة النتيجة بالصفر كالاتي:

$$=\frac{n}{\hat{\alpha}}+n\log(\hat{\beta})-\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^\infty\left[\left(x^{-(\hat{\alpha}+1)}.\ln(x)+x^{-2\hat{\alpha}-1}(\hat{\beta})^{\hat{\alpha}}.\ln\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)\right))\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\right).\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx.\right]}{\int_0^\infty x^{-(\hat{\alpha}+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}\right]=0 \quad \ldots\ldots.(10)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial\beta}=\frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\int_0^\infty x^{-\alpha-1}\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}})\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\int_0^\infty x^{-(\hat{\alpha}+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}=0$$

................................(11)

ونلحظ من الصيغ (١٠) و (١١) بانه ليس هنالك صيغة مغلقة للحل، لذلك سوف نبحث عن التكرار الرقمي لنحصل على مقدرات الامكان الاعظم وذلك باستعمال طريقة نيوتن رافسون حتى نحصل على تقديرات الامكان الاعظم الضبابية

$\hat{\alpha}\ fmle$ و $\hat{\beta}\ fmle$

وكالاتي:

ليكن $\theta=(\alpha،\beta)^T$ متجه المعلمات، فان عند الخطوة $(h+1)$ من عمليات التكرار يمكن الحصول على المعلمات كالاتي:

$$\theta^{h+1}=\theta^h-\left[\frac{\partial^2 L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\theta\partial\theta^T}\Big|_{\theta=\theta^h}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{\partial L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta^h}\right]$$

إذ إن :-

$$\frac{\partial L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}\frac{\partial L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\beta}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\theta\partial\theta^T}=\begin{pmatrix}\frac{\partial L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\alpha\partial\beta}\\ \frac{\partial L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\alpha\partial\beta} & \frac{\partial L^*(\alpha,\beta;\tilde{x})}{\partial\beta^2}\end{pmatrix}$$

فان تباين وتباين المشترك للمعلمات α،β يكون كالاتي:

$$S_1=\frac{\partial L^{*2}}{\partial\alpha^2}=-\frac{n}{\alpha^2}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left(\int_0^\infty x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)}\left(\int_0^\infty \ln(x)^2\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}+2\ln(x)\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)-\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)^2+\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)^2\right).\left(x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)+\frac{\left(\int_0^\infty \ln(x)+\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)\right).\left(x^{-\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)^2}{\left(\int_0^\infty x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)^2}$$

$$S_2=\frac{\partial L^{*2}}{\partial\beta^2}=-\frac{n\alpha}{\beta^2}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right).\left(x^{-\alpha-1}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}\right.$$

$$\left.+\frac{\int_0^{\infty}x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\left(\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)^2}\right)$$

$$S_3=\frac{\partial L^{*2}}{\partial\alpha\partial\beta}=-\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-\ln(x)\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{\beta}-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\ln(x)\frac{\alpha}{\beta}).(x^{-\alpha-1}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right))\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{(\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx)}\right.+$$

$$\left.\frac{\int_0^{\infty}x^{-\alpha-1}\ln(x)\,exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)+x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\beta}{x}\right)exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx.\int_0^{\infty}x^{-\alpha-1}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\frac{\alpha}{\beta}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx}{\left(\int_0^{\infty}x^{-(\alpha+1)}exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)^2}\right)$$

ونستمر بعملية التكرار **Replication** حتى التقارب، اي حتى يكون

$$\left|\left|\theta^{h+1}-\theta^{h}\right|\right|$$

اقل من ε بحيث ان $\varepsilon > 0$ وهو عدد صغير جدا.

ولإيجاد التقدير بالفترة لمعلمات توزيع معكوس ويبل باستعمال طريقة الامكان الأعظم الضبابية، وتسمى طريقة (**Wald Technique**) نجد اولاً مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المراد تقدير فترة الثقة لها باستعمال خاصية (**Gramer – Roa lower Bound**) والذي يساوي معكوس محدد مصفوفة معلومات فيشر المشاهدة وكالآتي:

$$\Sigma=-\frac{1}{I(\hat{\alpha},\hat{\beta})}$$

مصفوفة معلومات فيشر يمكن ان تستخرج كالآتي:

$$I(\hat{\alpha},\hat{\beta})=-E\begin{pmatrix}S_1 & S_3\\ S_3 & S_2\end{pmatrix}$$

اي ان مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المراد تقدير فترة الثقة لها يكون كالآتي:

$$\Sigma=\frac{1}{E\begin{pmatrix}-S_1 & -S_3\\ -S_3 & -S_2\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}^2(\hat{\alpha}) & \hat{\sigma}(\hat{\alpha},\hat{\beta})\\ \hat{\sigma}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) & \hat{\sigma}^2(\hat{\beta})\end{pmatrix}$$

فان فترات الثقة للمعلمات المراد تقديرها يمكن ان يستخرج وفقًا لنظرية المقاربة لـ **MLE**، فإن توزيع المعاينة:

$$z=\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(\hat{\alpha})}}$$

$$z=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\beta}^2(\hat{\alpha})}}$$

يمكن أن يقرب باستعمال التوزيع الطبيعي القياسي بفترة ثقة فان فترة الثقة لكل معلمة من المعلمات تستخرج كالآتي:

$$\hat{\alpha}-Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\hat{\sigma}^2(\hat{\alpha})}<\alpha<\hat{\alpha}+Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\hat{\sigma}^2(\hat{\alpha})}\quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\quad(12)$$

$$\hat{\beta}-Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\hat{\sigma}^2(\hat{\beta})}<\beta<\hat{\beta}+Z_{1-\frac{\psi}{2}}\sqrt{\hat{\sigma}^2(\hat{\beta})}\quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\quad(13)$$

طريقة الإمكان الأعظم النسبية الضبابية Fuzzy Relative Maximum Likelihood Method (FRMLE) [١٠]

فان دالة الإمكان الأعظم الضبابية لتوزيع

معكوس ويبل الضبابي يمكن ان تكتب الصيغة الاتية:

$$L^{*} = \log\left(L_0(\alpha,\beta;\tilde{x})\right)$$

$$= n\log(\alpha) + n\alpha\log(\beta) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^\infty x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)$$

........................(14)

واذا تم تعويض المعلمات المقدرة بطريقة الامكان الأعظم الضبابية $\hat{\alpha}\ fmle$ و$\hat{\beta}\ fmle$ في معادلة (١٤) نحصل على الآتي:

$$L^{*}(\hat{\alpha}_{fmle}, \hat{\beta}_{fmle}, \tilde{x}) = n\log(\hat{\alpha}_{fmle}) + n\,\hat{\alpha}_{fmle}\log(\hat{\beta}_{fmle}) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^\infty x^{-(\hat{\alpha}_{fmle}+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}_{fmle}}{x}\right)^{\alpha_{fmle}}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right) \quad \ldots\ldots$$

.......(15)

فان دالة الامكان النسبية (Relative Likelihood Function) نحصل عليها بقسمة معادلة (١٤) على معادلة (١٥) ونحصل على الآتي:

$$R(\alpha,\beta;\tilde{x}) = \frac{L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x})}{L^{*}(\hat{\alpha}_{fmle},\hat{\beta}_{fmle},\tilde{x})} =$$

$$\frac{\log(\alpha)+n\alpha\log(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^\infty x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)}{\log(\hat{\alpha}_{fmle})+n\,\hat{\alpha}_{fmle}\log(\hat{\beta}_{fmle})+\sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^\infty x^{-(\hat{\alpha}_{fmle}+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}_{fmle}}{x}\right)^{\hat{\alpha}_{fmle}}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)}$$

........................(16)

اذا رمزنا الى مقدر الامكان الاعظم للمعلمة α بمعلومية المعلمة β بالرمز $\hat{\alpha}(\beta)$ فان مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة β يمكن الحصول عليها بتعظيم دالة الامكان للتوزيع وكالآتي:

$$L_p(\beta) = \max_{\alpha} L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x}) = L^{*}(\hat{\alpha}(\beta),\beta;\tilde{x})$$

$$= \max_{\alpha}Log(\hat{\alpha}(\beta)) + n\hat{\alpha}(\beta)\log(\beta) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^\infty x^{-(\hat{\alpha}(\beta)+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\hat{\alpha}(\beta)}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)$$

.........(17)

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\beta)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\beta) = \frac{\partial L_p(\beta)}{\partial\beta} = \frac{n\hat{\alpha}(\hat{\beta})}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x^{-(\hat{\alpha}(\hat{\beta})+1)}\hat{\alpha}(\beta)\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\beta})-1}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\beta})}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)}{\int_0^\infty x^{-(\hat{\alpha}(\hat{\beta})+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}}{x}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\beta})}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx} = 0$$

..............(18)

ولأيجاد مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة α يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$L_p(\alpha) = \max_{\alpha}L^{*}(\alpha,\beta;\tilde{x}) = L^{*}(\alpha,\hat{\beta}(\alpha);\tilde{x})$$

$$= \max_{\alpha}Log(\alpha) + n\alpha\log(\hat{\beta}(\alpha)) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^\infty x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx\right)$$

..........(19)

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\alpha)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة α ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\alpha) = \frac{\partial L_p(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{1}{\hat{\alpha}} + n\log(\hat{\beta}(\alpha)) + \sum_{i=1}^{n}\frac{x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{x}\right)^{\alpha}\right)lOG\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{x}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x) - (\alpha+2)x^{-(\alpha+2)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)}{\int_0^\infty x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{x}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{x}_i}(x)dx} = 0$$

...............(20)

فان فترة الثقة $100\%\psi$ حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة β هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\beta) \geq \psi \quad \ldots\ldots\ldots.. (21)$$

اذ ان $r_p(\beta)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة β

فان فترة الثقة الامكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\beta) - \mathrm{Log}(\psi) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots(22)$$

$$r_P(\beta) - \mathrm{Log}(0.147) = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

والمعادلتين (٢٢) و (٢٣) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (**Bisection Method**) وان فترة الثقة **ψ%100** حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\alpha) \geq \psi \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(24)$$

اذ ان $r_P(\beta)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة α

فان فترة الثقة الامكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\alpha) - \mathrm{Log}(\psi) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(25)$$

$$r_P(\alpha) - \mathrm{Log}(0.147) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots(26)$$

والمعادلتين (٢٥) و (٢٦) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (**Bisection Method**)

الجانب التجريبي:

في هذا القسم، سيتم مناقشة نتائج أسلوب المحاكاة، الذي سيقارن بين طرائق التقدير المستعملة لتقدير معلمات بالفترة توزيع معكوس ويبل، وأجريت الدراسة على احجام عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة)، وقيم افتراضية محددة مسبقا مختلفة لمعلمات التوزيع وباستعمال المعيار الاحصائي (**AMSE**) واحتمال التغطية كأساس للمقارنة وذلك لتحديد افضلية طرائق التقدير.

١ – مفهوم المحاكاة (The Simulation Concept):

(يعرف المحاكاة بانها الاسلوب الذي يتم من خلاله التعامل مع كافة المشاكل المعقدة التغيير والتي تتداخل فيه العلاقات الرياضية المستندة على منطق حركة تلك المتغيرات بوصف نظام معين ومحاولة ايجاد الحلول المناسبة لكافة مشاكله).

ويمكن فهم اسلوب المحاكاة (**Simulation**) على إنَّه عملية تمثيل او تقليد للواقع الحقيقي وذلك باستعمال اساليب وطرائق معينة [1،3]

٢- وصف مراحل تجربة المحاكاة Describe the stages of the simulation experiment

شملت تجارب المحاكاة مراحل عدّة لتقدير معلمات التوزيع الاحتمالي بالفترة وكما يأتي:

تم اعتماد طريقة مونتي كارلو (**Monte- Carlo**) لهدف توليد بيانات بأحجام مختلفة تستخدم لتقدير معلمات توزيع معكوس ويبل وذلك باستعمال برنامج (**MATIAB**) وبحسب المراحل التالية:-

المرحلة الأولى: وهي من اهم مراحل تجربة المحاكاة وهي المبدأ الأساسي في بناء المحاكاة، ويعتمد عليها المراحل الاخرى بشكل كبير ويعتمد عليها تطبيق البرنامج وعملياته، أذ يتم فيها اختيار قيم افتراضية وتتكون هذه المرحلة من الخطوات الاتية:

١. تحديد قيم افتراضية لمعلمات التوزيع معكوس ويبل.

٢. اختيار قيم افتراضية لمعلمات التوزيع معكوس ويبل، وحسب ما مبين في الجدول (١) أدناه:

جدول (١) القيم الافتراضية للمعلمات والنماذج المقترحة لتوزيع معكوس ويبل

Models	θ	α
1	1.1	1.1
2	1.2	1.5

٣. اختيار حجم العينة حيث تم اختيار خمسة احجام وهي (الصغيرة والمتوسطة والكبيرة) وهي (20،40،60،80،100) من اجل تحديد تأثير حجم العينة على نتائج التقدير.

٤. تكرار التجربة (١٠٠٠) مرة لغرض الحصول على أفضل نتائج متجانسة.

المرحلة الثانية: في هذه المرحلة من مراحل المحاكاة التي يتم فيها توليد البيانات عشوائية بما ينسجم مع التوزيع الاحتمالي باستعمال البرنامج الإحصائي (MATLAB) ومن ثم تحويل البيانات التوزيع الاحتمالي الى بيانات ضبابية باستعمال دالة انتماء مثلثية حسب الصيغة (٤)

المرحلة الثالثة: هي مرحلة التقدير والتي فيها يتم الحصول على مقدرات المعلمات لتوزيع معكوس ويبل وذلك باستعمال الطرائق المبينة في الجانب النظري التي هي:

١. طريقة الامكان الأعظم الضبابية (Maximum Likelihood Method Fuzzy) ويرمز لها بالجداول بالرمز FMLE.

٢. طريقة الإمكان الأعظم الضبابية (Fuzzy Relative Maximum Likelihood Method) ويرمز لها بالجداول بالرمز FRMLE.

المرحلة الرابعة: تتم المقارنة في هذه المرحلة بين المقدرات بالفترة التي تم الحصول عليها لتوزيع معكوس ويبل والمبينة في الجداول وذلك باستعمال معدل متوسط مربعات الخطأ (AMSE) كمعيار احصائي للمقارنة.

جدول (٢) يوضح قيم تقدير المعلمات بالفترة و معدل متوسط مربعات الخطأ واحتمال التغطية لطريقتي التقدير للنموذج الأول بحسب حجوم العينات المفترضة وعند القيم الافتراضية لمعلمات توزيع معكوس ويبل عندما تكون α=1.1،β=1.1

n	Mothed	Est. para	Int of est	Iength	Cov of prob	AMSE
20	FMLE	1.40485	(1.33709،1.472620)	0.13552	0.91	0.277142
		0.59343	(0.555614،0.631256)	0.075641	0.83	0.46051
	FRMLE	1.0709	(0.949281،1.19253)	0.243254	0.94	0.02644
		1.08355	(1.05458،1.11252)	0.057942	0.96	0.014947
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		0.0510	0.01438	2.3348e-05	3	

40	FMLE	1.637441	(1.57912،1.69575)	0.11662	0.81	0.48858
		0.53844	(0.49685،0.58002)	0.08317	0.80	0.51050
	FRMLE	1.10408	(0.98912،1.21905)	0.22993	0.94	0.00371
		1.08626	(1.05810،1.11442)	0.05632	0.96	0.012485
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		0.0811	0.04450	1.6077e-05	3	
60	FMLE	1.42155	(1.37131،1.47179)	0.10047	0.90	0.292321
		0.53761	(0.506462،0.568762)	0.06229	0.80	0.51126
	FRMLE	1.044861	(0.938285،1.151437)	0.21315	0.94	0.05012
		1.16445	(1.091372،1.157527)	0.0661	0.96	0.05859
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		0.07500	0.037566	0.000394	3	
80	FMLE	1.99177	(1.948059،2.035497)	0.08743	0.66	0.810707323425051
		0.51747	(0.478104،0.556845)	0.07874	0.79	0.529568270932468
	FRMLE	1.10862	(1.020406،1.196843)	0.17643	0.95	0.007841
		1.07586	(1.053961،1.106773)	0.0528	0.96	0.021938
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		0.095892	0.04861	4.77038e-05	3	

100	FMLE	1.19554	(1.17511،1.21598)	0.040872	0.96	0.08686
		0.31530	(0.29779،0.33281)	0.035019	0.65	0.71336
	FRMLE	1.1037	(1.03508،1.17232)	0.13723	0.94	0.00336
		1.08046	(1.06357،1.09735)	0.033784	0.96	0.01775
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		0.16628	0.13287	2.36187e-05	3	

جدول (٣) يوضح قيم تقدير المعلمات بالفترة و معدل متوسط مربعات الخطأ واحتمال التغطية لطريقتي التقدير للنموذج الثاني بحسب حجوم العينات المفترضة وعند القيم الافتراضية لمعلمات توزيع معكوس ويبل عندما تكون

n	Mothed	Est. para	Int of est	Iength	Cov of prob	AMSE
	FMLE	0.82180	(0.63912،1.00449)	0.365375	0.88	0.315158
		1.82433	(1.80444،1.844215)	0.039766	0.92	0.216221
	FRMLE	0.82180	(0.639121،1.004497)	0.365375	0.88	0.315158
		1.82433	(1.804449،1.844215)	0.039766	0.92	0.216221
20						
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		0.011147	0.00023904	0.011147	2	
	FMLE	1.260193	(1.12801،1.39237)	0.26435	0.96	0.05016
		1.447741	(1.41991،1.51556)	0.055644	0.97	0.000034839052188
	FRMLE	1.26019	(1.12801،1.39237)	0.2643	0.96	0.05016
		1.447741	(1.41991،1.51556)	0.05564	0.97	0.000034839052171
40						
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		0.000296627056852428	0.0006086	0.000296627056845082	3	
	FMLE	1.2409	(1.12470،1.35722)	0.232513	0.96	0.0341366365908918
		1.47043	(1.44670،1.50415)	0.057543	0.97	0.0197110057590589
	FRMLE	1.24096	(1.12470،1.35722)	0.232513	0.96	0.0341366366248745
		1.47043	(1.4467،1.5041)	0.05754329124	0.97	0.0197110057193363
60						
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		0.000116378	0.0006977	0.00011637829	3	
	FMLE	1.17910	(1.09103،1.26717)	0.17613	0.96	0.01741
		1.49969	(1.48295،1.51644)	0.03348	0.97	0.00020
	FRMLE	1.17910	(1.09103،1.26717)	0.17613	0.96	0.01741
		1.49969	(1.48295،1.51644)	0.03348	0.97	0.000201
80						
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		1.095185e-05	0.00332	1.09518650697e-05	3	

	FMLE	1.215756649	(1.14042،1.291093)	0.1506	0.96	0.01313
		1.487723857	(1.472835،1.502611)	0.0297	0.97	0.00818
	FRMLE	1.215756649	(1.140420،1.29109)	0.1506	0.96	0.01313
		1.487723857	(1.47283،1.50261)	0.0297	0.97	0.00818
100						
	MSE of model	MSE(1)	MSE(2)	MSE(3)	best	
		1.7834e-05	0.004699	1.7834e-05	3	

الاستنتاجات:

١. من خلال الجدول رقم (٢) نلاحظ بأن قيم المقدرة بالفترة للأنموذج الأول كانت طريقة الإمكان الأعظم النسبية الضبابية هي الأفضل خلال عينات (١٠٠،٨٠،٦٠،٤٠،٢٠)

٢. من جدول رقم (٣) نلاحظ ان قيم المقدرة بالفترة للأنموذج الثاني كانت الإمكان الأعظم النسبية الضبابية هي الأفضل عند حجوم عينات (١٠٠،٦٠،٤٠،٢٠) وكانت طريقة الإمكان الأعظم الضبابية افضل عند حجم عينة (٨٠)

٣. لاحظنا من الجدولين السابقين بانه تبين افضلية طريقة الإمكان الأعظم النسبية الضبابية للنموذجين كافة عند حجوم العينات الصغيرة والكبيرة والمتوسطة.

التوصيات:

١. يمكن اجراء مقارنة بين توزيع معكوس ويبل وتوزيعات أخرى.

٢. يوصي الباحث باستخدام اكثر من دالة انتماء ضبابية لتوزيع معكوس ويبل لتوليد بيانات واجراء مقارنة بين هذه الدوال.

٣. تطبيق توزيع معكوس ويبل في مجالات متعددة مثل الجانب الهندسي والصناعي.

٤. استعمال طرائق أخرى لتقدير بالفترة توزيع معكوس ويبل عند حجوم عينات مختلفة.

المصادر

(١) حافظ، علي ماضي، (٢٠٢٠)، «بناء دالة احتمالية للتوزيع المختلط (الأسي- فريجت) لتقدير دالة المعولية الضبابية»، رسالة ماجستير في علوم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة كربلاء.

(٢) حسين، بنين احمد، (٢٠٢٠)، «تقدير المعولية لتوزيع معكوس كاما في حالة البيانات الضبابية»، رسالة ماجستير في علوم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة كربلاء.

(٣) حسين، لمياء خالد، (٢٠١٧)، «تقدير المعلمات ودالة المعولية للتوزيع الأسي الموزون بالاعتماد على البيانات الضبابية»، رسالة ماجستير في علوم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة المستنصرية.

4- Alkarni، S ; Afify، A.Z ; Elbatal، I & Elgarhy، M، (2020)،" The extended inverse Weibull distribution: properties and applications "، Complexity، page (1-11)

5- Chen، Guanrong & Tat، Trung، (2000)،" Introduction to Fuzzy sets، Fuzzy Logic and Fuzzy

Control Systems"، Boca Raton London New York Washington، D.C CRC Press

6- Drapella، A، (1993)،" The complementary Weibull distribution: unknown or just forgotten "، Quality and reliability engineering international، 9.4:383-385

7- Hogg، R.V; Mckean، J.W & Craig، A.T، (1978)،" Introduction to Mathematical Statistics "، Eighth Edition، Macmillan Publishing Co. In، New

8- Kwang، H. Lee، (2004)،" Frist Course on Fuzzy Theory and Applications "، ISSN 16-15-3871، ISBN 3-540-22988-4 Springer، Berlin Heidelberg New York، ppt:1-20

9- Mweleli، R.M ; Orawo، L.A ; Tamba، C.L & Okenye، J.O، (2020)،" Interval Estimation in a Parameter Weibull Distribution Based on Type-2 Censored Data "، Open Journal of Statistics، 10(06)، 1039-1056

10- Nájera، E & Bolívar-Cimé، A، (2021)،" Comparison of same interval estimation methods for the parameters of the gamma distribution "، Communication in Statistics – Simulation and Computation، 1-17

11- Pak، Abbas، (2016)،" Inference for the Shape Parameter of Lognormal Distribution in Presence of Fuzzy Data "، Pak.j.stat.oper.res، Vol. XII، No.1، pp.89-99

12- Pak، Abbas; Ali، Gholam & Saraj، Mansour، (2013)،" Reliability estimation in Rayleigh distribution based on fuzzy life time data "، Int J Syst Assur Eng Manag، springer، DOI 10.1007/s13198-013-0190-5

13- Tao، Terence، (2011)،" An Introduction to Measure Theory "، the American Mathematical Society (AMS)، pages (77-89)

14- Torabi، H & Mirhosseini، S.M، (2009)،" The Most Powerful Tests for Fuzzy Hypotheses Testing with Vague Data "، Applied Mathematical Sciences، Vol.3، No.33، page (1619-1633)

15- Wu، Hsien-Chung، (2004)، " Fuzzy reliability estimation using Bayesian approach "، Computers & Industrial Engineering، 46، pp 467-493

16- Zadeh، L.A، (1968)،" Fuzzy Algorithms"، Information and control، 12، 94، 102

17- Zadeh، L.A، (1965)،" Fuzzy Sets "، Information and Control، Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory، University of California، Berkeley، California، 8، 338-353