

**استعمال توزيع معكوس كاما النصف الدائري
لتحديد احتمالية الاصابة بأمراض العيون**

الباحث عمار محمد جاسم
كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء

ammar.m@s.uokerbala.edu.iq

أ. د. مهدي وهاب نصر الله
كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء

mehdi.wahab@uokerbala.edu.iq

ملخص

في هذا البحث، تم استعمال المحاكاة بواسطة برنامج ماتلاب باستعمال توزيع كاما المعكوس النصف دائري وطريقة التقدير (OHD) طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة لتحديد انحناء القرنية الخلفي لبيانات العين تم الحصول عليها من مختبر عيون كربلاء في محافظة كربلاء المقدسة للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون باستعمال جهاز مفروس الشبكية Optical coherence tomography (OCT) للتصوير المقطعي ثلاثي الابعاد لعيون (١٠٠) مريض. وتم التوصل الى قيم دالة الكثافة الاحتمالية ودالة البقاء المقدرة بموجب طريقة (OHD) مقارنة مع قيم دالة الكثافة الاحتمالية عند البيانات الحقيقية، كلما زادت زاوية انحناء القرنية الخلفي، قل احتمال اصابة المريض بأمراض العين مثل الزرق (العمى). فعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (٤٥, ٠) راديان فان احتمال بقاء المريض مصاب (٩٩٪)، وعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (٢٣, ٢) راديان فان احتمال بقاء المريض مصاب (١٦, ٠٪).

الكلمات المفتاحية: التوزيع الدائري (القطبي)، توزيع معكوس كاما النصف دائري، مقدار اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة، دالة الكثافة التوزيعية.

**Title: The Use of Inverse Half-Cauchy Distribution
to Determine the Probability of Eye Diseases**

Ammar Mohammed Jasim

University of Karbala - College of Management and Economics

ammam.m@s.uokerbala.edu.iq

Dr. Mehdi Wahab Nasrallah

University of Karbala - College of Management and Economics

mehdi.wahab@uokerbala.edu.iq

Abstract

In this research, simulation was used by MATLAB program using the semicircular inverse gamma distribution and the estimation method (OHD) one-step Hellinger least distance method to determine the posterior curvature of the cornea for eye data obtained from the Karbala Eye Laboratory in the holy city of Karbala for advanced diagnostic examinations of diseases Eyes using OCT (Optical coherence tomography) for three-dimensional tomography of the eyes of (100) patients. The values of the probability density function and the survival function estimated according to the (OHD) method were found to be close to the values of the probability density function when the real data, the greater the angle of the corneal curvature back, the less likely the patient will develop eye diseases such as glaucoma (blindness).

Keywords: circular (polar) distribution, semicircular inverse gamma distribution, one-step Hellinger minimum distance estimator, distribution density function.

المقدمة

تعرف القرنية بأنها الطبقة الخارجية الشفافة للعين التي تعمل مع بياض العين كحاجز واقٍ يحمي مكونات العين الحساسة من تأثير الاوساخ والجراثيم والجزيئات الأخرى، ويمكن للقرنية أيضاً حجب كميات معينة من أشعة الشمس فوق البنفسجية. وتلعب القرنية دوراً أساسياً في قدرة الشخص على الرؤية حيث ينكسر الضوء عند دخوله إلى العين نتيجة لشكلها الخارجي، إذ يحدد انحناء هذه الطبقة الخارجية جودة تركيز العين على الأجسام القريبة منها والبعيدة عنها. وعندما تتعرض القرنية للتلف جراء إصابتها بمرض أو التهاب أو أذى يمكن أن تؤثر النذب أو تغيرات اللون على الرؤية من خلال حجب الضوء أو حرقه لدى دخوله إلى العين. (Scott C. Litin M.D., 2018) وقد أجريت العديد من الدراسات بهذا الصدد ففي عام (٢٠١٥) استعمل (Ramblí et al.) وآخرون اختبار التناقض لاكتشاف القيم المتطرفة الفردية أو المتعددة في البيانات نصف الدائرية بناءً على نظرية التباعد على التوزيع النصف الدائري الجديد الذي تم تطويره باستخدام تقنية الإسقاط المجسم العكسي على متغير له توزيع كاما. بعد ذلك، وتم تطبيق الاختبار على مجموعة بيانات العين التي تم الحصول عليها من عيادة الجلوكوما في المركز الطبي بجامعة مالايا في ماليزيا. وتوصلوا إلى أن التوزيع المقترح ملائم لنمذجة البيانات التي تمثل نصف قطر دائرة الوحدة، وأن الاختبار المستعمل على التوزيع

المقترح أكثر فائدة للكشف عن القيم المتطرفة. في عام (٢٠١٧) اقترح (Abu Zaid) التوزيع النصف الدائري Burr-XI (Half Circular Bur-XII distribution) عن طريق استعمال تقنية إسقاط المجسم العكسية وقدر معلماته باستعمال طريقة الامكان الأعظم وقام بتقييم اداء التقديرات باستعمال تجارب محاكاة مونت-كارلوا على خمسة احجام عينات ($n=10, 30, 50, 100, 200$) التي تم توليدها من توزيع Burr-XII النصف دائري بالمعلمات ($k=1, c=1, 3, 1, 0.5$) وتكرار (٢٠٠٠) مرة لكل تجربة محاكاة باستعمال المعايير متوسط التقديرات (Mean)، التحيز (Bias)، متوسط مربعات الخطأ (MSE)، وتم تطبيقه على مجموعة بيانات حقيقية لـ (٢٣) مصاباً بانحناء القرنية الخلفي حيث تم النقاط الصور الشعاعية للعين باستعمال التصوير المقطعي للجزء الأمامي من التماسك البصري (AS-OCT) في عيادة الجلوكوما في المركز الطبي بجامعة مالايا، ماليزيا وتم مقارنة تقديرات توزيع Burr-XII مع توزيع كاما النصف دائري المقترح من قبل (Ramblí et al., 2015) باستعمال معيار معلومة اكاكي (AIC) وتم التوصل من خلال تطبيق البيانات الحقيقية بأن توزيع Burr-XII النصف دائري أكثر ملاءمة من توزيع كاما النصف دائري بحيث حقق أقل قيمة لمعيار معلومة اكاكي (AIC). ومن تجارب المحاكاة تم التوصل إلى أن هنالك علاقة دالية متزايدة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ التي اكدت خاصية الاتساق

في هذا البحث، سيتم استعمال توزيع جديد مقيد بنطاق معين من مدى دائرة الوحدة، توزيع نصف دائري طالما ان النماذج الأخرى تقع في نطاق الفترة $(0, 2\pi)$ والذي يمثل المشاهدات والواقعة بدقة على نصف دائرة الوحدة، على سبيل المثال في الفترة $(0, \pi)$ بالراديان ، باستخدام الإسقاط المجسم العكسي وباستعمال طريقة مقدر اقل مسافة (OHD) لتحديد امراض العيون التي تخص القرنية.

١. مشكلة البحث:

تواجهنا في العالم الحقيقي، أن بعض الظواهر تقع ضمن المدة (الفترة) $(0, 2\pi)$ وعادة ما يتم نمذجة هذه الظواهر عن طريق التوزيعات الدائرية (Circular distributions) ، ولكن قد تواجهنا مشكلة ان بعضاً من تلك الظواهر قد تحتاج أن تقع ضمن منتصف المدى الدائري اي ضمن المدة (الفترة) $(0, \pi)$ إذ إن الخاصية الدورية للبيانات الدائرية ليست مفيدة للبيانات نصف الدائرية لأن $0^\circ 36'$ ليست هي نفسها 180° . لذلك من الضروري إيجاد انموذج او توزيع احتمالي يمثل تلك الظواهر وهذا ينطوي في ظل التوزيعات النصف دائرية (Half Circular distribution).

٢. هدف البحث:

يرمي البحث الى إيجاد توزيع كما المعكوس النصف الدائري بالاعتماد على خاصية إسقاط المجسم العكسية (Inverse stereographic projection) والتي تختص بتحويل البيانات الاعتيادية (الديكارتية) الى بيانات قطبية (مقاسة بالزوايا) ومن ثم إيجاد خصائص التوزيع

لمقدرات الامكان الأعظم ونسبة تغطية قليلة جداً عند فترة الثقة (٩٥٪) مع اختلاف طفيف عند حجم العينة $(n=10)$. في عام (٢٠١٧) اقترح (Abu Zaid) التوزيع النصف الدائري Burr-XII (Half Circular) عن طريق استعمال تقنية إسقاط المجسم العكسية وقدر معلماته باستعمال طريقة الامكان الأعظم وقام بتقييم اداء التقديرات باستعمال تجارب محاكاة مونت -كارلوا على خمسة احجام عينات $(n=10, 30, 100, 200)$ التي تم توليدها من توزيع Burr-XII النصف دائري بالمعلمات $(k=1, c=1, 3, 1, 0.5)$ وتكرار (٢٠٠٠) مرة لكل تجربة محاكاة باستعمال المعايير متوسط التقديرات (Mean)، التحيز (Bias)، متوسط مربعات الخطأ (MSE) وتم تطبيقه على مجموعة بيانات حقيقية لـ (٢٣) مصابا بانحناء القرنية الخلفي حيث تم التقاط الصور الشعاعية للعين باستعمال التصوير المقطعي للجزء الأمامي من التماسك البصري (AS-OCT) في عيادة الجلوكونا في المركز الطبي بجامعة مالايا ، ماليزيا وتم مقارنة تقديرات توزيع Burr-XII مع توزيع كما النصف دائري المقترح من قبل (Rambli et al. , 2015) باستعمال معيار معلومة اكاكي (AIC) وتم التوصل من خلال تطبيق البيانات الحقيقية بان توزيع Burr-XII النصف دائري اكثر ملائمة من توزيع كما النصف دائري بحيث حقق اقل قيمة لمعيار معلومة اكاكي (AIC).

حيث ان $r(\phi)$ نصف قطر الدائرة والذي يساوي:

(Phani, & Rao. 2012)

$$(3) \dots r(\phi) = a + bp(\phi)$$

حيث ان a, b يتم اختيارهما على اساس شكل التوزيع, على سبيل المثال اذا كان لدينا متغير عشوائي X يمثل الولادة في شهر معين من السنة , وكانت الاشهر مرتبة حول دائرة , بحيث يكون كل شهر بجوار الشهر التالي . فسيكون التوزيع الشبكي الدائري هو احتمال الولادة في شهر معين من السنة. أي ان دالة الكثافة الاحتمالية $p(x)$ يمكن ان تلتف حول محيط دائرة نصف قطرها الوحدة والتي تشكل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير الملتف (Wrapped Variable).

$$(4) \dots \theta = x_w = x \in (-\pi, \pi)$$

فأن:

$$(5) \dots p_w(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi k)$$

يمكن توسيع هذا المفهوم ليشمل السياق متعدد المتغيرات من خلال امتداد المجموع البسيط إلى عدد F من المجاميع التي تغطي جميع الابعاد وكالاتي:

$$(6) \dots p_w(\vec{\theta}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_F=-\infty}^{\infty} p(\vec{\theta} + 2\pi k_1 e_1 + \dots + 2\pi k_F e_F)$$

الجديد النصف دائري ومن ثم تقدير معلمات التوزيع

الجديد بالاعتماد على طريقة اقل مسافة Hellinger

ذو الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum

Hellinger Distance Estimator) ومن ثم تطبيق

المقدرات المستخرجة على بيانات حقيقية.

٣. التوزيع الدائري (القطبي) Circular(Polar)

distribution

التوزيع الدائري (Circular distribution) أو التوزيع القطبي (Polar distribution) هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي تكون قيمه هي الزوايا القطبية، والتي تقع ضمن الفترة $(-\pi, \pi)$ والتوزيعات الدائرية غالباً ما يكون توزيعات احتمالية مستمرة ، وبالتالي تكون لها دالة كثافة احتمالية ، ولكن يمكن أيضاً أن تكون هذه التوزيعات منفصلة ، وفي هذه الحالة تسمى توزيعات شبكية دائرية . يمكن استخدام التوزيعات الدائرية حتى عندما لا تكون المتغيرات المدروسة زوايا صريحة فالاعتبار الرئيسي هو أنه لا يوجد عادة أي تمييز حقيقي بين الأحداث التي تحدث في الطرف السفلي أو العلوي من النطاق، ويمكن تقسيم النطاق نظرياً في أي وقت. (Dodge, Y. 2006)

إذا كان التوزيع الدائري له كثافة احتمالية كالاتي:

$$(1) \dots p(\phi) \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

والتي يمكن تمثيلها بيانيا بمنحنى مغلق:

$$(2) \dots [x(\phi), y(\phi)] =$$

$$[r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi]$$

توزيع كاما المحول النصف دائري يرمز له
 $CTIG(\alpha, \beta)H$ يمكن الحصول عليه باستعمال
 التحويل: (Wang, M-Z.& Shimizu, K.2012)
 $\theta = 2 \tan^{-1} x$ (9).....

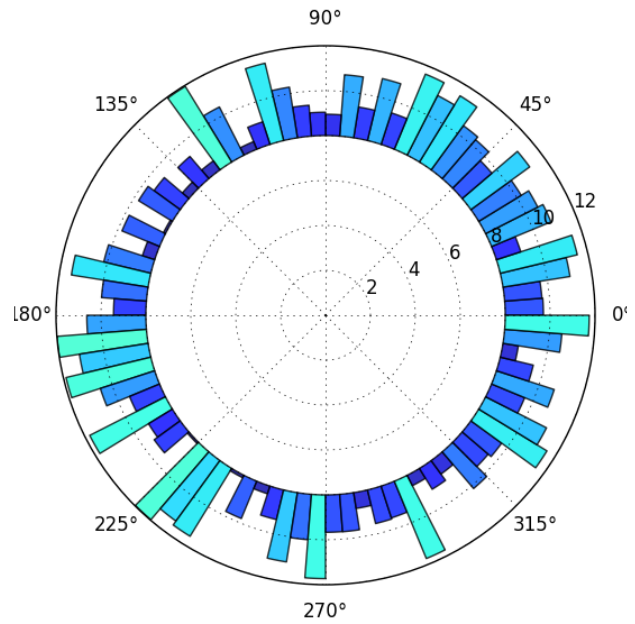
بحيث θ ان تعطى ضمن الفترة $(0, \pi)$

ليكن $m(\theta) = \tan(\theta/2)$ باستخدام إسقاط
 مجسم عكسي فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG
 تعطى بالشكل الآتي:

$$g(\theta) = |m'(\theta)|f(m(\theta)) \quad (10) \dots\dots\dots$$

ومن معادلة (١٠) سنحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} |m'(\theta)| &= \left| \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \quad (11) \dots\dots\dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - \cos(2(\frac{\theta}{2}))}{1 + \cos 2(\frac{\theta}{2})} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \end{aligned}$$



شكل (١) توزيع الاحتمالات على قطر دائرة الوحدة

٤. توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول (HCTIG):

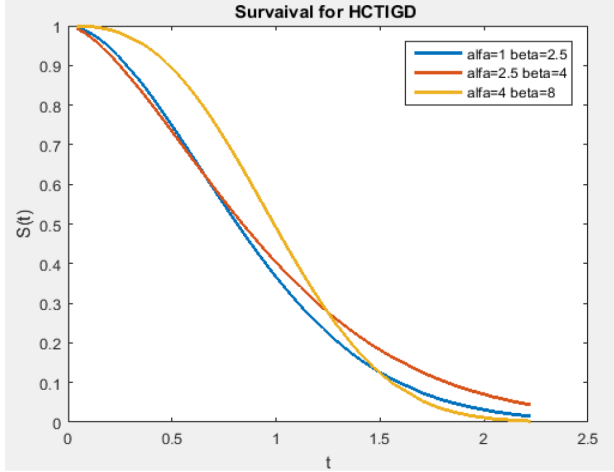
لنفرض انه لدينا المتغير العشوائي X له توزيع كاما
 بالمعلمتين (α, β) حيث ان معلمة الشكل α , معلمة
 القياس β , فان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي
 تعطى بالصيغة الآتية:

$$f(x, \alpha, \beta) = \quad (7) \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) I_{(0, \infty)}$$

اذ ان $\Gamma(\alpha)$ تعرف بدالة كاما والتي تحسب كما يأتي:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (8) \dots\dots\dots \\ &= (\alpha - 1)! \end{aligned}$$



شكل (٣) منحني دالة البقاء لتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول

٥. المحاكاة (Simulation) :

تعد دراسات المحاكاة أداة مهمة للبحث الإحصائي. إذ إنها تساعدنا على فهم خصائص الأساليب الإحصائية ومقارنة الطرائق المختلفة. وهي عملية تطبيق للخيال على واقع افتراضي تجريبي لغرض فحص مشكلة معينة أو قياس أداء معين لغرض دراسة السلوك وبإعطاء النتائج على الواقع الحقيقي، أي هو عملية تقليد لنظام معين ينطوي بناء تاريخ اصطناعي مع مميزات النظام الحقيقي لغرض فهم ذلك النظام أفضل ما يكون ودراسة سلوكه وتطوره بمرور الوقت. وكثيراً ما نجد في الواقع الحقيقي أن هناك عمليات تكون معقدة الفهم والتحليل لذلك فمن الأفضل أن نوصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم النموذج يحقق لنا قدراً من الإدراك للعملية الأصلية أو الواقع الحقيقي عن طريق محاكاة النموذج، ومن الطبيعي أن

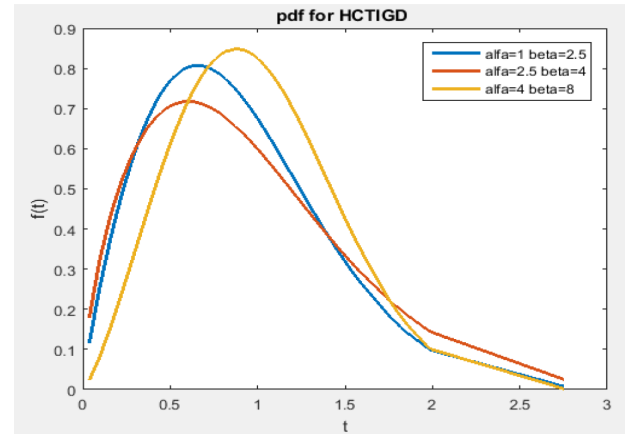
وأن:

$$(12) \dots\dots f[m(\theta)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right)$$

وبذلك تكون دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كالاتي:

(ADZHAR et al , 2019)

$$(13) \dots g(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha(1+\cos(\theta))} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right); 0 < \theta < \pi$$



شكل (٢) منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع معكوس كاما النصف دائري المحول

مختلفة من العينات , وتكرار العملية مرات كثيرة بدلا من ان تسحب من المجتمع الحقيقي وبذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يحقق للباحثين حلاولا تحليلية وكذلك يؤمن قاعدة تجريبية تكون دليلاً لهم مع القاعدة النظرية لاختيار الاسلوب الملائم او الطريقة الملائمة لتحليل ودراسة بيانات الظواهر التي يدرسونها عن طريق مطابقة خصائصها مع الانواع التي طبقت المحاكاة عليها. (Silva& et al. , 2010 ,429-430)

٥-١ مراحل تطبيق تجارب المحاكاة :

تتضمن تجارب المحاكاة المراحل الآتية:

المرحلة الأولى:

تعد هذه المرحلة من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة إذ يتم فيها اختيار القيم الافتراضية، أي تعيين احجام العينات المفترضة وكما يأتي:

$n = 10, 30, 50, 100, 200$ اذ تم الحصول على القيم الافتراضية تجريبياً من إجراء تجارب عدة واختيار القيم التي إستقرت عندها التقديرات وأعطت أفضل النتائج كما مبينة بالجدول الآتي:

جدول (١) قيم المعلمات الافتراضية

Parameter	Model			
α	1			
β	0.5	1	2	3

الجدول (١) يمثل القيم للمعلمات الافتراضية التي حصلنا عليها بتكرار تجارب المحاكاة مساوياً لـ ($r = 1000$) لكل تجربة.

درجة المشابهة بين أي تجربة محاكاة والواقع الحقيقي تعتمد على مدى مطابقة او مشابهة انموذج المحاكاة للنظام الحقيقي. لقد تعددت اساليب المحاكاة ولاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استعمال الحاسبة الالكترونية ولكونها الاسلوب الفعال الذي يمكننا من ادارته بشكل تطبيقي واسع في التطبيق العملي.

ومن المبادئ الاساسية للمحاكاة باستعمال الحاسبة وضع برنامج يمثل او يشابه سلوك العملية الحقيقية بشكل مقارب للواقع الحقيقي قدر الامكان، وغالباً ما يكون هذا الواقع معقداً جداً لتمثيله أو تقليده بصورة متقنة في برنامج الحاسبة وعلى الرغم من ذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يعطي معلومات مفيدة عن الواقع الحقيقي الذي يشابهه، ونماذج المحاكاة الأكثر شبه للواقع الحقيقي تكون أكثر دقة في النتائج والمعلومات المستخلصة منها. ان اول مراحل استعمال اسلوب المحاكاة هو توليد المتغيرات العشوائية قيد الدراسة، كما ان أي تجربة محاكاة ماهي الا عبارة عن نوع معين من انواع المعاينة اذ تسحب هذه العينة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة بأحجام

المرحلة الثانية: توليد البيانات:

لغرض توليد بيانات توزيع HCTIG سيتم استعمال قاعدة الرفض والقبول بالاعتماد على التوزيع الأسّي العمومي (Generalized exponential distribution) وفقاً للخطوات الآتية: (Kundu & D. Gupta, 2007)

١. نضع:

$$(14).....a = \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\alpha}}{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\alpha} + \frac{\alpha e^{-1}}{2^{\alpha}}}$$

$$(15).....b = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)^{\alpha} + \frac{\alpha e^{-1}}{2^{\alpha}}$$

٢. نولد متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم U على المدة (الفترة (0,1))

٣. إذا كان $U \leq a$ فإن $x = -2 \ln \left[1 - (Ub)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$

٤. نولد متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم V على الفترة (0,1) ويكون مستقلاً عن U.

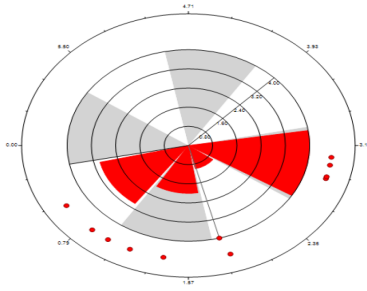
٥. إذا كان $V \leq \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\alpha-1} \left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\alpha-1}}$ فإن V هو

توزيع كاما بمعلمتين، عدا ذلك نعود الى الخطوة ٢.

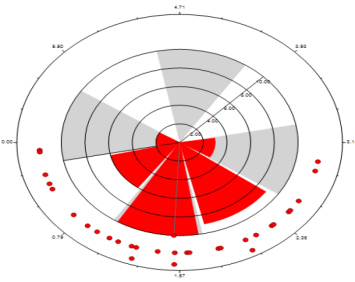
٦. إذا كان V هو توزيع كاما فإن $Z = 1/V$ هو توزيع معكوس كاما بمعلمتين.

٧. باستعمال تقنية اسقاط الجسم العكسي عن طريق الدالة $Z = \tan(\theta)$ فإن الدالة العكسية لهذه

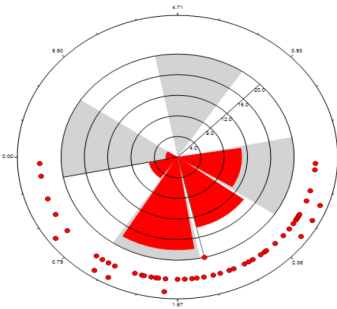
الدالة هي $\theta = \tan^{-1}(Z)$.



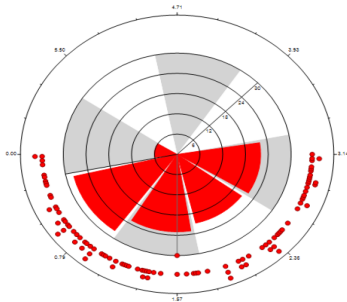
شكل (٤) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول بحجم عينة n=10



شكل (٥) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول بحجم عينة n=30



شكل (٦) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول بحجم عينة n=50



شكل (٧) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول بحجم عينة n=100

أ. معدل التحيز Bias: يمثل معدل التحيز مطلق مجموع الفرق بين القيمة المقدرة والقيمة الحقيقية مقسوماً على عدد مرات تكرار التجربة وصيغته كالآتي:

$$Bias = \left| \frac{\sum_{i=1}^r (\hat{\theta} - \theta)}{r} \right| \quad (16)$$

r عدد مرات تكرار تجارب المحاكاة

ب. متوسط مربعات الخطأ Mean Square of Errors (MSE): هو معدل مجموع مربعات الفرق بين المعلمة المقدرة والمعلمة الحقيقية مضافاً له مربع التحيز، وصيغته كالآتي:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta} - \theta)^2}{n} + Bias^2 \quad (17)$$

(Ali H. Abu Zaid, 2017, 12)

ج. نسبة التغطية للمعاملات المقدرة CP

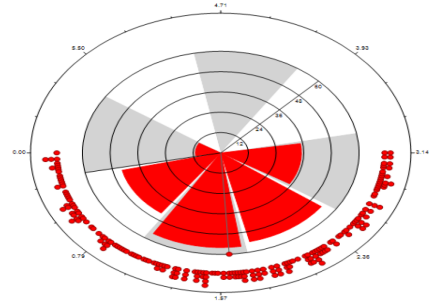
The actual coverage probabilities (CP) of nominal 95% credible/confidence intervals

في الإحصاء احتمالية التغطية هي تقنية لحساب مقدار الثقة، وهو نسبة الوقت الذي يحتوي فيه الفاصل الزمني على القيمة الحقيقية ويعطى بالصيغة الآتية:

$$CP = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (18)$$

حيث ان USL و LSL الحدود العليا والدنيا المخصصة لمدة (لفترة) الثقة، يعطي بسط CP مدى التغطية الذي يمكن أن تختلف فيه قياسات العملية. ويعطي المقام مدى التغطية الذي تختلف فيه العملية فعلياً. فكلما كان احتمال التغطية عالياً كانت المعلمات المقدرة أفضل.

(Panichkitkosolkul, W., 2016, 110)



شكل (٨) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول
بحجم عينة n=200

ومن الاشكال (٤) الى (٨) نلاحظ ان البيانات تتوزع في الربع الثالث والرابع من الدائرة وهو ما يمثل سلوك البيانات للتوزيع النصف دائري حسب حجم العينات المفترضة.

المرحلة الثالثة:

في هذه المرحلة يتم تقدير معالم توزيع HCTIG بموجب طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator).

تم الحصول على مقدرات معالم توزيع HCTIG بإحدى الطرائق العددية المستعملة لحل المعادلات الرياضية غير الخطية عن طريق استعمال الدالة fsolve في برنامج ماتلاب ولطريقة التقدير المذكورة انفا.

المرحلة الرابعة:

لغرض الوصول للمقدر الافضل عن طريق المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة، فقد جرى الاعتماد بشكل عام على المعايير الآتية:

٢-٥ مناقشة نتائج المحاكاة:

الجدول (٢) ولتجربة عدد مكرراتها (١٠٠٠) مرة،

وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها في الفقرة التالية.

٣-٥ تقديرات معلمات توزيع HCTIG عندما $\alpha=1$

وقيم $\beta=0.5, 1, 2, 3$

تم عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير معلمات توزيع HCTIG في الجداول التي سيتم تحليلها

بحسب التسلسل، ولحجوم العينات المختلفة والحالات

المختلفة للقيم الافتراضية الأولية كافة والموضحة في

جدول (٢) متوسط تقديرات معلمات توزيع HCTIG ومتوسط مربعات الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية

عند مدة (فترة ثقة 95%) عندما $\alpha=1$ وقيم $\beta=0.5, 1, 2, 3$

β		Index										
			10		30		50		100		200	
			α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
	0.5	Mean	0.84	0.86	0.85	0.83	1.04	0.59	1.01	0.52	1.00	0.51
		Bias	0.16	0.36	0.15	0.33	0.04	0.09	0.02	0.02	0.00	0.01
		MSE	0.178	0.115	0.031	0.111	0.024	0.045	0.012	0.013	0.014	0.010
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95
	1	Mean	0.88	0.87	0.84	0.85	0.99	0.97	1.10	0.99	1.01	1.10
		Bias	0.12	0.13	0.16	0.15	0.01	0.03	0.10	0.01	0.01	0.10
		MSE	0.113	0.057	0.123	0.056	0.021	0.055	0.018	0.014	0.012	0.001
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95
	2	Mean	0.82	2.99	0.81	2.66	0.97	2.14	1.19	2.13	1.14	2.12
		Bias	0.18	0.49	0.19	0.16	0.03	0.36	0.19	0.37	0.14	0.38
		MSE	0.122	0.982	0.121	0.872	0.111	0.512	0.111	0.311	0.101	0.122
		CP %	93	93	93	94	94	95	95	95	95	95
	3	Mean	0.41	3.89	0.61	3.50	0.75	3.47	1.42	3.33	1.33	3.23
Bias		0.59	0.89	0.39	0.50	0.25	0.47	0.42	0.33	0.33	0.23	
MSE		0.444	0.357	0.342	0.232	0.331	0.211	0.131	0.114	0.121	0.111	
CP %		90	92	92	93	94	94	95	95	95	95	

١.٦ البيانات الحقيقية (Real Data)

أخذت مجموعة بيانات عن العين تم الحصول عليها من مختبر عيون كربلاء في محافظة كربلاء للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون باستعمال جهاز مفروس الشبكية OCT للتصوير المقطعي ثلاثي الأبعاد المقدسة والتي تم التقاط صور للجزء الخلفي من عيون (١٠٠) مريض. والمتغير الذي يمثل البيانات المدروسة هو الزاوية مقاسة بالراديان والتي تقيس الانحناء الخلفي للقرنية الناتجة من تقاطع المحور الهندسي للعين (الخط الأفقي) مع الخط المصنوع بين التواءات الصلبة الأنفية والزمنية (الخط العمودي). إذ عندما نرسم نصف القطر إلى السطح الخلفي للقرنية بأطوال تتراوح بين (٣, ٤٩, ٥١) ملم فإن الزاوية الممتدة بنصف القطر هي انحناء القرنية الخلفي كما مبين في الشكل (٩). من المتوقع أن يكون للزاوية قيمة أعلى عندما تكون القرنية محدبة بشكل أكبر.

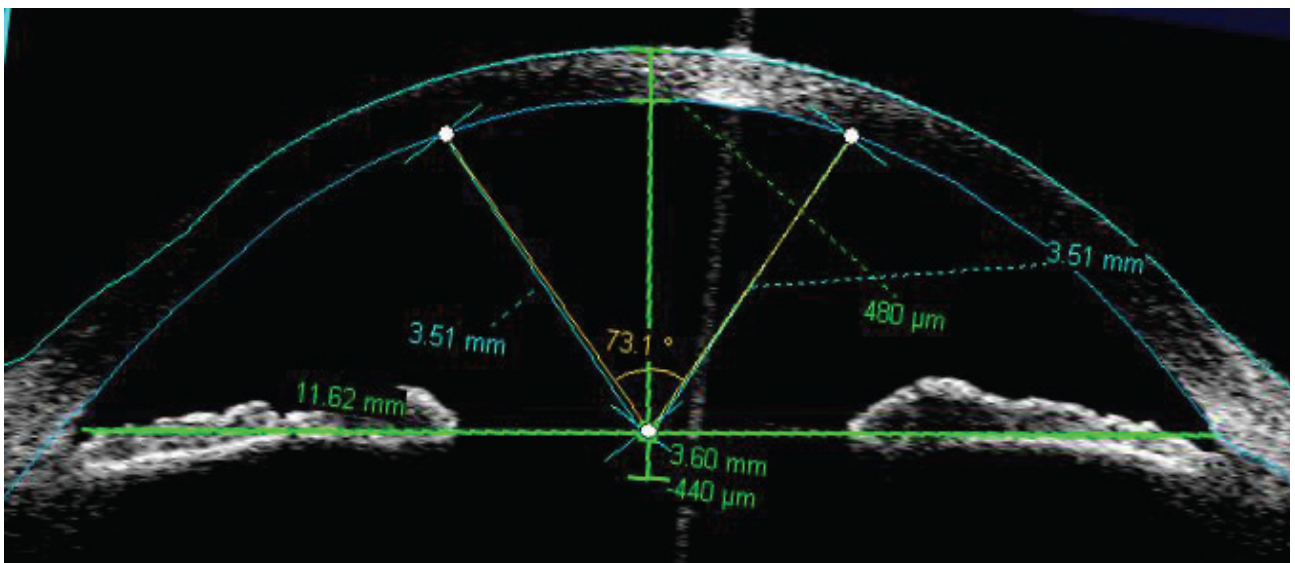
من جدول (٢) وعند القيم الافتراضية و $\alpha = 1$

$\beta = 0.5, 1, 2, 3$ يتضح ما يأتي:

١. القيم التقديرية متناسقة مع القيم الافتراضية وقريبة عليها وكلما زاد حجم العينة اقتربت الملاحظات المقدرة من الملاحظات الافتراضية.

٢. برهنت طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD) عند القيم الافتراضية $\beta = 0.5, 1, 2, 3$ و $\alpha = 1$ أنها تمتلك اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) لكافة القيم التقديرية.

٣. نلاحظ وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (٩٥٪) لأحجام العينات $n=50$ (100,200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات $(n=10,30)$.



شكل (٩) قياس انحناء القرنية الخلفي (Rambli et al., 2015, 4)

ولاختبار هذه الفرضية الاحصائية سيتم احتساب

٧. اختبار ملائمة البيانات Data Fitting :

قيمة إحصاء χ^2 وحسب الصيغة الآتية:

للتأكد من ان البيانات ملائمة للتوزيعات المدروسة

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \dots\dots (19)$$

تم استعمال اختبار Chi-square لحسن المطابقة وبموجب

الفرضية الآتية:

حيث تم احتساب إحصاء حسن المطابقة χ^2_c في برنامج

H_0 : The data have the HCTIG

(MatLab) وكانت نتائج الاختبار كما في جدول (٣):

H_1 : The data dont have the HCTIG

جدول (٣) نتائج اختبار ملائمة البيانات

Distribution	χ^2_c	χ^2	Sig.	Decision
HCTIG	0.07855	15.51	0.44358	Don't reject

٨. المفاضلة بين التوزيع المقترح وباقي التوزيعات:

نلاحظ من جدول (٣) ان قيمة χ^2_c المحسوبة

في هذه الفقرة سيتم استعمال معايير المقارنة بين

لتوزيع معكوس كما النصف دائري المحول والبالغة

التوزيعات وهي (-2LnL, AIC, AICc, BIC, HQIC)

(٠, ٠٧٨٥٥) اقل من قيمة χ^2_c الجدولية عند مستوى

للمقارنة بين التوزيعات المستعملة وهي توزيع معكوس

معنوية ٥٪ ودرجة حرية (٨) والبالغة (١٥, ٥١)

كما النصف دائري المحول وتوزيع معكوس كما وتوزيع

وكانت قيمة Sig= ٠, ٤٤٣٥٨ اكبر من مستوى

كما بمعلمتين لغرض معرفة اي من التوزيعات اكثر دقة

المعنوية (٠, ٠٥) وهذا يعني عدم رفض فرضية العدم

للبينات الحقيقية وكانت النتائج في جدول (٤).

اي ان البيانات الحقيقية تتوزع وفقاً لتوزيع معكوس

كما النصف دائري المحول.

جدول (٤) نتائج اختبارات المقارنة والدقة والتي طبقت على البيانات الحقيقية

Distribution	MMLE	-2LnL	AIC	AICc	BIC	HQIC
HCTIG	$\alpha=1.2134$ $\beta=2.1123$	123.22	123.56	123.88	123.45	5.08
Inverse Gamma	$\alpha=1.32311$ $\beta=2.4511$	124.98	124.78	124.69	124.55	7.66
Gamma	$\alpha=1.51221$ $\beta=2.75332$	126.99	126.88	126.69	126.88	9.64

٩. تحليل البيانات الحقيقية : (Real data analysis)

بينت نتائج تجارب المحاكاة الموضحة في هذا البحث أفضلية طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) في تقدير معالم توزيع معكوس كما النصف دائري المحول عند كافة احجام العينات المفترضة، وتبين كذلك من الجانب التطبيقي أفضلية معكوس كما النصف دائري المحول لتمثيل البيانات الحقيقية، وعلى ضوء ذلك تم تقدير المعالم ودالة البقاء بطريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة وكانت نتائج التقدير كما في جدول (٥) أدناه:

نلاحظ من جدول (٤) بان معايير الاختبارات الخاصة بتوزيع معكوس كما النصف دائري المحول أفضل من توزيع كما وتوزيع معكوس كما في ملائمة البيانات الحقيقية، وهذا يدل عن ملائمة البيانات الحقيقية أكثر لتوزيع معكوس كما النصف دائري المحول من باقي التوزيعات. ونلاحظ ايضاً ان المعالم المقدرة بطريقة اقل مسافة Hellinger ذي الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) للبيانات الحقيقية لتوزيع معكوس كما النصف دائري المحول أكثر اقتراباً للمعلمات الافتراضية في الجانب التجريبي بخلاف باقي التوزيعات التي نلاحظ ان المعالم المقدرة أكثر ابتعاداً عن المعالم الافتراضية.

جدول (٥) قيم دالة الكثافة الاحتمالية ودالة البقاء المقدرة بموجب طريقة (OHD) للبيانات الحقيقية

No.	t_i	$f(t_i)$	(t_i)	Real $S(t_i)$	(t_i)
1	0.45	0.21836	0.22511	0.99956	0.99856
2	0.47	0.22786	0.22561	0.99955	0.99844
3	0.56	0.24117	0.23906	0.99933	0.99831
..	..	..	.	.	..
50	1.47	0.65511	0.59412	0.10327	0.10227
51	1.48	0.65453	0.59412	0.10122	0.10022
52	1.49	0.67885	0.59412	0.10051	0.19951
53	1.54	0.55522	0.59412	0.19877	0.19777
54	1.55	0.66533	0.59412	0.19676	0.19576
..	..	..	..	..	..
.	.	.	.	.	.
97	2.21	0.26747	0.25783	0.00054	0.00044
98	2.21	0.26747	0.25783	0.00045	0.00035
99	2.22	0.24455	0.25783	0.00035	0.00025
100	2.23	0.23422	0.25783	0.00026	0.00016

٣. كلما قلت زاوية انحناء القرنية الخلفي، قل احتمال إصابة المريض بأمراض العين مثل الحول الزرق العمى. فعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (٠, ٤٥) راديان فإن احتمال بقاء المريض مصاب (٩٩٪)، وعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (٢, ٢٣) راديان فإن احتمال بقاء المريض مصاب (٠, ١٦٪).

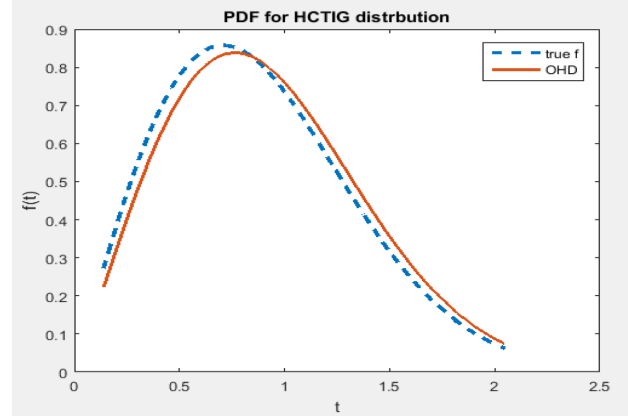
التوصيات

١. استعمال تقنية الاسقاط العكسي لإيجاد التوزيعات النصف دائرية المحولة والتوزيعات المركبة والتوزيعات المختلطة والتي تتضمن أكثر من معلمتين.

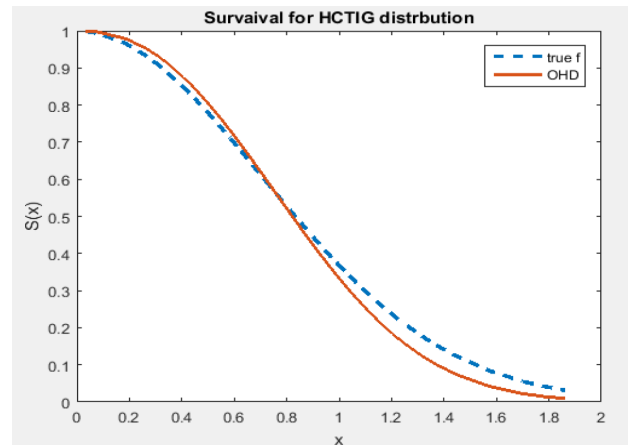
٢. استعمال طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD) لتقدير المعلمات كونها أعطت نتائج مقبولة.

٣. الحفاظ على العين من الامراض خصوصا انحناء القرنية والبحث في أسبابها وطرق معالجتها ومكافحة الحالات المماثلة.

٤. نوصي وزارة الصحة العراقية بضرورة اعتماد نتائج هذه الرسالة لغرض تقدير احتمال الإصابة بأمراض العين بالاستناد إلى زاوية انحناء القرنية الخلفي.



شكل (١١) منحني دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة



شكل (١٢) منحني دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة

الاستنتاجات

من الجدول (٥) والأشكال (١١) و(١٢) يتضح الآتي:

١. تناقص قيم دالة البقاء مع الزمن وبصورة واضحة وهذا ما يطابق سلوك هذه الدالة كونها متناقصة مع الزمن.
٢. قيم دالة الكثافة الاحتمالية المقدرة بموجب طريقة (OHD) متقاربة مع قيم دالة الكثافة الاحتمالية عند البيانات الحقيقية.

Data. London: Academic Press.

9. Mardia, K.V. & Jupp, P.E. 2000. Directional Statistics. 2nd ed. Chichester: Wiley.
10. McKay, J. 1987. On computing discriminants. The American Mathematical Monthly 94(6): 523-527.
11. Minh, D.L.P. & Farnum, N.R. 2003. Using bilinear transformations to induce probability distributions. Communications in Statistics-Theory and Methods 32: 1-9.
12. Phani, Y., Girija, S.V.S. & Rao, A.V.D. 2012. Circular model induced by inverse stereographic projection on extreme-value distribution. Engineering Science and Technology 2(5): 881-888.
13. Rambli, A., Mohamed, I.B., Shimizu, K. and Khalidin N. (2015). Outlier detection in a new half-circular distribution. AIP Conference Proceedings, Selangor, Malaysia, 24-26, November, paper no. 050018. pp. 1-5, doi: 10.1063/1.4932509.
14. Scott C. Litin M.D., (2018). 'Mayo Clinic Family Health ', 5th Edition: Completely Revised and Updated Hardcover - May 29.
15. Venables, W.N. & Ripley, B.D. 2002. Modern Applied Statistics with S. 4th ed. New York: Springer.
16. Wang, M-Z. & Shimizu, K. 2012. On applying Möbius transformation to cardioids random variables. Statistical Methodology 9: 604-614.

المصادر

1. ADZHAR RAMBLI, IBRAHIM MOHAMED, KUNIO SHIMIZU & NORLINA MOHD RAMLI, (2019), " A Half-Circular Distribution on a Circle", Sains Malaysiana 48(4)(2019): 887-892 <http://dx.doi.org/10.17576/jsm-2019-4804-21>
2. Dodge, Y. (2006). The Oxford Dictionary of Statistical Terms. OUP. ISBN 0-19-920613-9
3. Gato, R. & Jammalamadaka, S.R. 2003. Inference for wrapped symmetric a-stable circular models. The Indian Journal of Statistics 65(2): 333-355.
4. Jammalamadaka, S.R. & SenGupta, A. 2001. Topics in Circular Statistics. Singapore: World Scientific.
5. Jones, M.C. & Pewsey, A. 2005. A family of symmetric distributions on the circle. Journal of the American Statistical Association 100: 1422-1428.
6. Kato, S. & Jones, M.C. 2010. A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation. Journal of the American Statistical Association 105: 222-229.
7. Lund, U. 1999. Least circular distance regression for directional data. Journal of Applied Statistics 26: 723-733.
8. Mardia, K.V. 1972. Statistics of Directional

